# 1 Super-schweres Adventskalender-Matherätsel

## 1.1 Aufgabe

**Behauptung:** Das Quadrat jeder Primzahl minus eins ist durch 24 teilbar.

**Beispiel:**
$p = 5$
$5^2 - 1 = 25 - 1 = 24 = 1 \cdot 24$

$p = 7$
$7^2 - 1 = 49 - 1 = 48 = 2 \cdot 24$

$p = 11$
$11^2 - 1 = 121 - 1 = 120 = 5 \cdot 24$

**etwas formaler:**
Sei $p$ eine Primzahl $\geq 5$.
Zu zeigen: $24|(p^2 - 1)$.

## 1.2 Hinweis

Betrachte die Primzahl sowie ihren Vorgänger und Nachfolger, und überlege Dir, durch welche Zahlen diese auf jeden Fall teilbar sind.

## 1.3 Lösung

Wir betrachten die Primzahl $p$ sowie ihren unmittelbaren Vorgänger $p - 1$ und Nachfolger $p + 1$. Dann gilt:

- $p - 1$ und $p + 1$ sind gerade Zahlen, da $p$ ungleich 2 und Primzahl ist.
- $p - 1$ oder $p + 1$ ist durch 4 teilbar, da jede zweite gerade Zahl durch 4 teilbar ist
- $p - 1$ oder $p + 1$ ist außerdem durch 3 teilbar, da von drei aufeinenderfolgenen Zahlen genau eine durch 3 teilbar. $p$ aber ist eine Primzahl ungleich 3 und scheidet somit aus.

Somit ist das Produkt $(p - 1) \cdot (p + 1)$ aber auch durch das Produkt von 2, 3 und 4 teilbar.
Weiterhin gilt (vgl. dritte binomische Formel oder ausmultiplizieren): $(p - 1) \cdot (p + 1) = p^2 - 1^2$.

Daraus folgt:
$2 \cdot 3 \cdot 4|(p^2 - 1^2)$
$24|(p^2 - 1) \quad \square$

## 1.4 Ergänzung

Die Primzahleigenschaft von $p$ wurde gar nicht voll für den Beweis ausgenutzt, sondern lediglich die Unteilbarkeit durch 2 und 3.
Somit gilt die Behauptung nicht nur für Primzahlen, sondern auch für Zahlen, die beim Teilen durch 6 entweder Rest 1 oder Rest 5 haben.

**Beispiele:**
5
7
11
13
17
19
23
25 (nicht prim, aber $25^2 - 1 = 624 = 26 \cdot 24$)
29
31
35 (nicht prim, aber $35^2 - 1 = 1124 = 51 \cdot 24$)
$\ldots$